Filière PC , PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II - ALGEBRE

Durée : 3 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Dans tout le problème :

- E désigne un espace euclidien de dimension $n > 0$.
- $\langle x | y \rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et y de E, $\|x\|$ la norme, associée à ce produit scalaire, du vecteur x de E.
- u est un endomorphisme de E, u^* son adjoint et l'entier r représente le rang de u.
- $L(E)$ est muni de la norme associée à celle définie dans E, on note pour tout endomorphisme v de E,
  $\|v\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|v(x)\|$

Dans les parties **1** et **2**, on définit la notion de pseudo-inverse d'un endomorphisme de E et on établit quelques propriétés de cette notion.

Dans la partie **3** on utilise la notion de pseudo-inverse pour la résolution "aux moindres carrés" d'équations linéaires.

Partie 1

1. Pour quelle raison peut-on affirmer que l'endomorphisme $u^* \circ u$ de E est diagonalisable dans une base orthonormale de E ?

2.

a. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres orthogonaux de $u^* \circ u$, on a alors $\langle u(x) | u(y) \rangle = 0$.

b. Etablir que $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$.

c. En déduire qu'il existe une base orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que, $(u(e_1), ..., u(e_r))$ soit une base orthogonale de $\mathrm{Im}(u)$ et $(e_{r+1}, ..., e_n)$ soit une base orthonormale de $\ker(u)$.

- On choisit pour la suite du problème une base orthonormale $(e_1,...,e_n)$ de E vérifiant les propriétés de la question précédente et on utilisera les notations suivantes:

  - $\forall k \in \{1,..,r\}, \sigma_k = \|u(e_k)\|$;
  - $\forall k \in \{1,..,r\}, f_k = \frac{1}{\sigma_k} u(e_k)$.

- On complète la famille $(f_1,...,f_r)$ en une base orthonormale $(f_1,...,f_n)$ de E.

3. Montrer que:

$$\forall x \in E, u(x) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x | e_k \rangle f_k .$$

Que peut-on dire de la matrice de u dans les bases $(e_1,...,e_n), (f_1,...,f_n)$?

4. En interprétant matriciellement les résultats obtenus dans les questions précédentes, montrer que pour toute matrice carrée A d'ordre n à coefficients réels, il existe des matrices orthogonales P , Q et une matrice diagonale D à éléments diagonaux positifs ou nuls telles que: $A = PDQ^{-1}$.

5. Etablir que :

$$\forall y \in E, u^*(y) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle y | f_k \rangle e_k .$$

6. En utilisant les questions 3 et 5, montrer que $\|u\| = \|u^*\| = \max_{1 \le k \le r}(\sigma_k)$.

Partie 2

- On conserve les notations de la partie 1.
- On définit l'application ${}^*u$ de E dans E par :

$$\forall x \in E, {}^*u(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k} \langle x | f_k \rangle e_k .$$

1. Montrer que ${}^*u$ est un endomorphisme de E.

2. Etablir que l'on a : $\mathrm{Im}({}^*u) = \ker(u)^{\perp}$. Quel est le rang de ${}^*u$?

3. Déterminer $\ker({}^*u)$.

4. Démontrer que $u \circ {}^*u$ et ${}^*u \circ u$ sont les projecteurs orthogonaux sur $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)^{\perp}$ respectivement. Que peut-on en déduire pour ${}^*u$ lorsque $r = n$?

5. Soit v un endomorphisme de E ayant les mêmes propriétés que celles établies pour ${}^*u$ dans les questions 2,3 et 4. Montrer que $(v \circ u) \circ {}^*u = {}^*u$ et $v \circ (u \circ {}^*u) = v$. Conclusion ?

6. En déduire que l'endomorphisme ${}^{\#}u$ ne dépend pas du choix de la base $(e_1,...,e_n)$ fait dans la partie 1.

- ${}^{\#}u$ s'appelle le pseudo-inverse de u. Il peut donc être défini pour tout endomorphisme de E.

7. Montrer que ${}^{\#}(u^*) = ({}^{\#}u)^*$.

8. *Exemple 1 :* $E = \mathbf{R}_n[X]$ muni du produit scalaire canonique. u est défini par : $\forall P \in E, u(P) = P'$. On note B la base canonique de E. Déterminer $M_B({}^{\#}u)$.

9. *Exemple 2 :* $E = \mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique. On oriente E et l'on considère a un vecteur non nul de E. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E, u(x) = x \times a$ où $x \times a$ désigne le produit vectoriel de x par a.

   a. Etablir que : $\forall x \in E, u^2(x) = \|a\|^2 \left[\langle x | a \rangle \frac{a}{\|a\|^2} - x \right]$.

   b. En déduire que ${}^{\#}u = -\frac{1}{\|a\|^2} u$.

Partie 3

- On conserve les notations des parties 1 et 2.

1. Soit b un vecteur non nul de E.

   a. Montrer que $\min_{x \in E} \|u(x) - b\|$ existe.

   b. Etablir qu'il existe un unique $x_0 \in \ker(u)^{\perp}$ tel que $\|u(x_0) - b\| = \min_{x \in E} \|u(x) - b\|$. Montrer de plus que, x_0 est, parmi les vecteurs x de E pour lesquels $\|u(x) - b\|$ est minimale, celui qui a la plus petite norme.

   c. En utilisant les résultats de la question 4 de la partie 2, montrer que $u(x_0) = (u \circ {}^{\#}u)(b)$. En déduire que $x_0 = {}^{\#}u(b)$.

- Soit w un endomorphisme de E.

2.

   a. Montrer que : $\forall v \in L(E), \forall x \in E, \ \|u(v(x)) - w(x)\| \geq \|u({}^{\#}u \circ w(x)) - w(x)\|$.

   b. En déduire que : $\|u \circ ({}^{\#}u \circ w) - w\| = \min_{v \in L(E)} \|u \circ v - w\|$.

3. Démontrer que l'on a de même : $\|(w \circ {}^{\#}u) \circ u - w\| = \min_{v \in L(E)} \|v \circ u - w\|$.